# Řešení du 4

středa 3. listopadu 2021 13:53

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}.$$

Bodová konvergence (zřejmě jen pro $x \in [-3, \infty)$)

$0 \le x \le 3$ $\quad 3 \le \sqrt[n]{x^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2} \cdot 3 \to 3$

Tedy $f_n(x) \to 3$ podle dvou strážníků

$-3 < x < 0$ $\quad 3 \leftarrow \sqrt[n]{C} \cdot 3 \le \sqrt[n]{x^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2} \cdot 3 \to 3$

C dostatečně malé (protože $\lim \frac{x^n}{3^n} = 0$)

Tedy $f_n(x) \to 3$ podle dvou strážníků

$x > 3$ $\quad x \le \sqrt[n]{x^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2}\, x \to x$

Tedy $f_n(x) \to x$ podle dvou strážníků

Celkově

$f_n \to f$, $x \in [0, \infty)$, $\quad f(x) = \max\{x, 3\}$

Stejnoměrná konvergence:

- na $[0,3]$

$$0 \leq \underbrace{\sqrt[n]{x^n+3^n}}_{= f_n(x)} - \underbrace{3}_{= f(x)} \leq \underbrace{(\sqrt[n]{2}-1)}_{\to 0}3$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,3]$.

- na $[3,\infty)$

rozdělíme na dva případy

- $x \in [3,4]$, potom

$$0 \leq \sqrt[n]{x^n+3^n} - x \leq (\sqrt[n]{2}-1)x \leq 4\underbrace{(\sqrt[n]{2}-1)}_{\to 0}$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[3,4]$

- $x \in [4,\infty)$

$$0 \leq \sqrt[n]{x^n+3^n} - x \overset{a^n-b^n}{=} \frac{3^n}{\sum_{k=0}^{n} (x^n+3^n)^{\frac{n-k}{n}} \cdot x^k}$$

volíme $k=n$

$$\leq \frac{3^n}{x^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[4,\infty)$.

Celkově tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,\infty)$.

Alternativně pro $x \in [3,\infty)$

$$\left[f_n(x) - f(x)\right]' = \frac{1}{n}\left(x^n + 3^n\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot n \cdot x^{n-1} - 1$$

$$= \frac{x^{n-1}}{\left(x^n+3^n\right)^{\frac{n-1}{n}}} - 1 = \left[\frac{x}{\sqrt[n]{x^n+3^n}}\right]^{n-1} - 1$$

Tedy $f_n'(x) - f'(x) \leq 0$, $x \in [3,\infty)$,

a

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(3) - f(3) = \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)3.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[3,\infty)$.

- $x \in (-3,0]$

Pro $n=2k+1$ platí

$$\lim_{x\to -3+} f_n(x) - f(x) = \lim_{x\to -3+} \sqrt[2k+1]{x^{2k+1}+3^{2k+1}} - 3 = -3$$

Tedy $\sigma_{2k+1} \geq 3$ a neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $(-3,0]$

- $x \in [a,0]$ pro nějaké $a \in (0,3)$.

$$\overset{3}{\nwarrow} \qquad \overset{3}{\nearrow}$$

$$\sqrt[n]{C}\, 3 \leq \sqrt[n]{-a^n+3^n} \leq \sqrt[n]{x^n+3^n} \leq \sqrt[n]{2}\cdot 3$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,0]$

Celkem tedy dostáváme, že

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } [a,\infty),\ a>-3.$$